INVERS DRAZIN DARI REPRESENTASI BLOK MATRIKS BIPARTIT

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

<u>ISE PUTRA</u>
10854002824

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

INVERS DRAZIN DARI REPRESENTASI BLOK MATRIKS BIPARTIT

ISE PUTRA
10854002824

Tanggal sidang : 31 Mei 2013
Tanggal wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang menentukan invers Drazin dari matriks bipartit. Matriks bipartit merupakan matriks yang dibentuk dari graf bipartit. Graf bipartit adalah graf G yang himpunan simpulnya dapat dikelompokan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi didalam G menghubungkan simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2. Berdasarkan hasil penelitian ini, maka diperoleh bahwa invers Drazin dari sebuah matriks *A* adalah tunggal yang dilambangkan dengan A^D yang memenuhi persamaan $AA^D = A^DA$, $A^DAA^D = A^D$, dan $A^{q+1}A^D = A^q$ dengan q adalah indeks dari A.

Katakunci : *Invers Drazin, Matriks Bipartit.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"Invers Drazin dari Representasi Blok Matriks Bipartit "**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Stata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta Bapak dan ibu yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan selaku Penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabaran dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Sahabat-sahabatku (Andri Fikos, Eko Mulyanto, Dedi Haryadi, Gustri Ningsi, Rahmawati , Irawati, Rusmita, Sutika Dewi, Ifka Ria Aida, Bustam, Yespi endri, Edi Setiawan, Lili wisdarni) yang selalu memberi support.
8. Semua teman-teman Jurusan Matematika Sains khususnya angkatan 2008.
9. Seluruh pihak yang telah memberikan motivasi kepada penulis dalam proses penulisan tugas akhir ini sampai selesai.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 31 Mei 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan suatu topik yang banyak mendapatkan perhatian saat ini, karena model–model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas. Secara matematis, graf didefenisikan (Rinalni Munir, 2007) sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul–simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul.

Secara umum graf dapat dikelompokan menjadi dua yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana. Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang atau sisi ganda sedangkan graf tidak sederhana adalah graf yang mengandung gelang atau sisi ganda. Ada beberapa graf sederhana khusus yang dijumpai pada berbagai aplikasi, beberapa diantaranya adalah graf lengkap, graf lingkaran, graf teratur, dan graf bipartit. Selanjutnya graf yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah graf bipartit.

Graf bipartit merupakan gabungan dari 2 himpunan tak kosong V_1 dan V_2 dan setiap garis dalam G menghubungkan suatu titik dalam V_1 dengan titik dalam V_2. Dari graf bipartit tersebut dapat kita buat suatu matriks yang disebut dengan matriks bipartit. Dari matriks bipartit tersebut kita dapat menentukan inversnya. Invers dari matriks bipartit dapat ditentukan dengan aturan dari invers Drazin.

Invers Drazin pertama kali dikenalkan oleh Michael P Drazin pada tahun 1958. Invers Drazin dari matriks bipartit A adalah tunggal yang dinotasikan dengan A^D. Invers Drazin telah banyak dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya seperti penelitian yang dilakukan oleh Lisnawati Khasanah dan Bambang Irawanto tahun 2011, yang membahas mengenai bagaimana menentukan Invers Drazin dari matriks singular yang dinotasikan sebagai A^D dengan menggunakan matriks bentuk konomik jordan. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh

Changjiang Bu dan Kuise Zhang tahun 2010 yang membahas mengenanai invers Drazin dari blok matriks kompleks beserta sifat-sifat dari invers Drazin.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penulis tertarik untuk mengulas sebuah jurnal yang berjudul."*Block Repsentations of the Drazin Inverse of a Bipartite Matriks"* yang diteliti oleh *Catral, D.D. Olesky and Van Den Driessche*, yang membahas tentang bagaimana menentukan Invers Drazin dari matriks bipartit yang diblok kedalam matriks 2×2, maka penulis mengambil judul "**Invers Drazin dari Representasi Blok Matriks Bipartit"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarakan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana menentukan invers Drazin dari Representasi blok matriks bipartit 2×2.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah mengemukakan langkah-langkah dalam menentukan invers Drazin dari Representasi blok matriks bipartit 2×2.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan invers Drazin dari Representasi blok matriks bipartit 2×2.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan ini adalah sebagai berikut

a. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks.
b. Untuk memperdalam ilmu pengetahuan tentang invers Drazin dari matriks bipartit
c. Memberikan informasi kepada pembaca bagaimana cara menentukan Invers Drazin dari matriks bipartit.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan terdiri dari lima bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, Perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisikan tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tugas akhir.

BAB III Metode Penelitian

Bab ini berisikan metode yang penulis gunakan dalam penyelesaian tugas akhir.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara secara teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian.

BAB V Penutup

Bab ini berisi tentang saran-saran dan kesimpulan dari pembahasan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Matriks merupakan kumpulan bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis diantara dua tanda kurung. Objek matriks dapat berupa bilangan real, bilangan komplek, ataupun fungsi. Setiap bilangan yang terdapat dalam matriks disebut elemen matriks. Semua bilangan yang tersusun dalam jalur horizontal disebut baris dan bilangan yang tersusun dalam jalur vertikal disebut kolom.

Elemen matriks bisa dinyatakan dengan notasi a_{ij}, dengan i menyatakan baris j menyatakan kolom. Bentuk umum sebuah matriks dengan elemen a_{ij} dinyatakan sebagai berikut :

$$A_{mxn} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Matriks juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{mxn} = a_{ij} \quad {}_{mxn}$$

dengan :

a_{ij} = elemen atau unsur matriks

i = $1,2,3,\cdots,m$, indeks baris

j = $1,2,3,\cdots,m$, Indeks kolom

2.2 Operasi Matriks

Adapun macam- macam operasi matriks diantaranya sebagai berikut:

2.2.1 Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua matriks atau dapat dilakukan jika ukuran-ukuran matriksnya sama. Misalkan $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ adalah dua matriks yang ukurannya sama, misalnya $m \times n$. Jumlah A dan B ditulis $A + B$, adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesusaian dari A dan B yaitu:

$$A + B = \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{matrix}$$

Contoh 2.1:

Tentukan penjumlahan matriks dibawah ini:

Misalkan $A = \begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{matrix}$

$B = \begin{matrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{matrix}$

Penyelesaian:

Karena A dan B mempunyai ukuran yang sama maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Maka hasil penjumlahan dari matriks tersebut adalah sebagai berikut:

$$A + B = \begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{matrix} + \begin{matrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}$$

2.2.2 Perkalian Matriks

Dua buah matriks dapat dikalikan satu terhadap yang lain jika banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris kedua. Misalkan A adalah matriks yang berukuran $m \times p$ dan B adalah matriks $p \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks yang berukuran $m \times n$.

Contoh 2.2:

Tentukan AB jika:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B maka AB dapat diperoleh dengan perhitungan sebagai berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 121 \\ 40 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Perpangkatan Matriks

Sifat perpangkatan pada matriks sama halnya seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan, misalkan A adalah matriks bujur sangkar maka pangkat dari A didefenisikan sebagai berikut:

$$A^2 = AA,$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$\vdots$$

$$A^{n-1} = A^{n-2}A$$

$$A^n = A^{n-1} A$$

$$A^{n+1} = A^n A$$

Contoh 2.3:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Tentukan A^2 dan A^3.

Penyelesaian:

Perpangkatan dari matriks A sama hal seperti perpangkatan yang dilakukan pada bilangan-bilangan, maka perhitungan dari perpangkatan A dapat dilakukan sebagai berikut:

$$A^2 = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{matrix}$$

$$A^3 = \begin{matrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{matrix}$$

2.3 Partisi Matriks

Partisi matriks adalah membagi matriks menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan memasukan garis horizontal dan vertikal antara matriks dan kolom matriks. Matriks-Matriks yang ukurannya kecil hasil partisi matriks disebut submatriks.

Partisi matriks digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukurannya besar menjadi matriks kecil sehingga lebih muda di operasikan untuk tujuan tertentu, misalnya mencari invers matriks. Setiap submatriks hasil partisi selalu, yaitu:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}$$

Matriks A_{11}, A_{12}, A_{21}, dan A_{22} disebut sub matriks dari matriks A.

$$A_{11} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}, \; A_{12} = \begin{matrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{matrix}, \; A_{21} = \begin{matrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix},$$

$$A_{22} = \begin{matrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

2.4 Invers Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 2000) : Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu subsitusi, partisi matriks, matriks adjoint, eliminasi gauss, eliminasi gauss-jordan, perkalian matriks invers elementer, dan dekomposisi matriks LU.

Contoh 2.4 :

Tentukan invers matriks di bawah ini:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan operasi baris elementer untuk mendapatkan A^{-1} maka hal ini dapat dirampungkan dengan operasi-operasi baris pada kedua ruas sehingga ruas kiri terreduksi pada I, sehingga matriks akhir akan mempunyai bentuk $I|A^{-1}$. Maka perhitungannya dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 - 2b_1$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 - b_1$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 - b_2$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \quad b_1 + b_3$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{matrix} \quad b_2 + 3b_3$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array} \quad b_1 - 2b_2$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}$$

Jadi :

$$A^{-1} = \begin{matrix} 9 & -3/2 & 5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{matrix}$$

2.5 Rank Matriks

$Rank$ dari suatu matriks berukuran $m \times n$ adalah jumlah maksimum dari vektor baris (kolom) yang bebas linear (*independen linear*). *Rank* dari suatu matriks merupakan dimensi dari vektor baris (kolom) *non-zero* pada matriks tersebut.

Matriks bujur sangkar A, jika vektor baris dan kolom yang bebas linear mempunyai dimensi yang sama maka dimensi tersebut merupakan *rank* matriks. Misalnya diketahui matriks A berukuran $m \times n$:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m2} \end{matrix}$$

Vektors baris dari matriks A adalah:

$u_1 = (a_{11,} a_{12} , \cdots , a_{1n})$

$u_2 = (a_{21,} a_{22,} \cdots , a_{2n})$

$u_m = (a_{m1,} a_{m2,} \cdots, a_{mn})$

Vektor kolom dari matriks A adalah :

$$v_1 = \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} \quad v_2 = \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix} , \cdots , v_n = \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}$$

$Rank$ dari matriks A dinyatakan oleh $rank(A)$ atau $r(A)$ notasi *rank* suatu matriks adalah:

$$Rank \quad A \quad \Leftrightarrow r (A)$$

$Rank$ matriks dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu matriks itu singular atau nonsingular. Jika A matriks bujur sangkar dengan dimensi $n \times n$, maka matriks A adalah nonsingular apabilah $rank\ A = n$ dan jika $rank\ A < n$ maka matriks A merupakan matriks singular.

Contoh 2.5:

Tentukan $rank$ dari matriks dibawah ini:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan operasi baris elementer kita dapat menentukan $rank$ dari matriks A dengan cara melihat banyaknya baris tak nol pada matriks Elementer yang didapat. Maka perhitungannya dapat dilakukan sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix} \; b_2 - 2\,b_1$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix} \; b_3 - 3b_1$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{matrix} \; b_3 - b_2$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Jadi *rank* dari matriks A=2

2.6 Matriks Bipartit

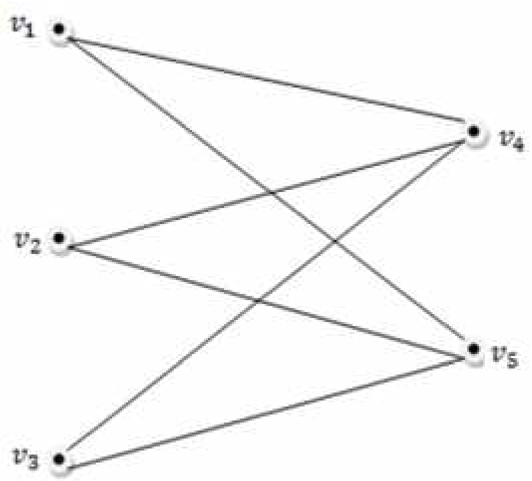
Matriks bipartit adalah matriks yang dibentuk oleh suatu graf yaitu graf bipartit.

Definisi 2.2 (Rinalni Munir, 2007) : Graf *G* yang himpunan simpulnya dapat dikelompokan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi didalam *G* menghubungkan simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 di sebut graf bipartit.

Adapun cara untuk menentukan matriks dari suatu graf bipartit adalah apabila simpul yang satu berhubungan dengan simpul yang lain maka mempunyai nilai dan sebaliknya apabila simpulnya tidak ada berhubungan maka tidak mempunyai nilai atau sama dengan nol untuk lebih jelas perhatikan contoh dibawah ini.

Contoh 2.6 :

Berikut merupakan gambar graf bipartit.



Gambar 2.1 Graf bipartit

Gambar diatas jelas bahwa titik-titik grafnya terbagi menjadi 2 bagian, yaitu $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{v_4, v_5\}$. Setiap titik dalam V_1dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 sehingga graf merupakan graf bipartit. Gambar diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks seperti dibawah ini:

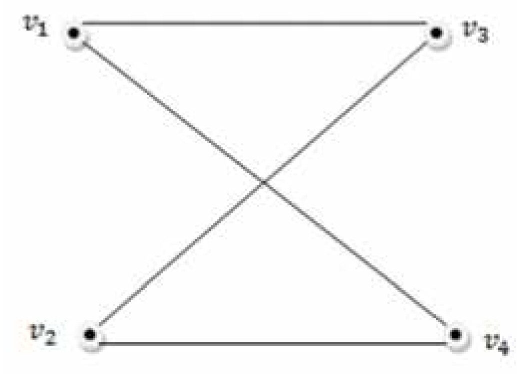
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks yang terbentuk dari graf bipartit disebut matriks bipartit. Kemudian matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks blok bipartit yang berukuran 2×2 seperti dibawah ini:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right].$$

Contoh 2.7 :

Berikut merupakan gambar graf bipartit



Gambar 2.2 Graf bipartit

Gambar diatas jelas bahwa titik–titik grafnya terbagi atas menjadi 2 bagian, yaitu $V_1 = \{v_1, v_2\}$ dan $V_2 = \{v_3, v_4\}$. Setiap titik dalam V_1 dihubungkan dengan setiap titik dalam V_2 sehingga graf merupakan graf bipartit. Gambar diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian matriks di atas diblok menjadi matriks blok bipartit yang berukuran 2×2 seperti dibawah ini:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right].$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan adalah situdi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

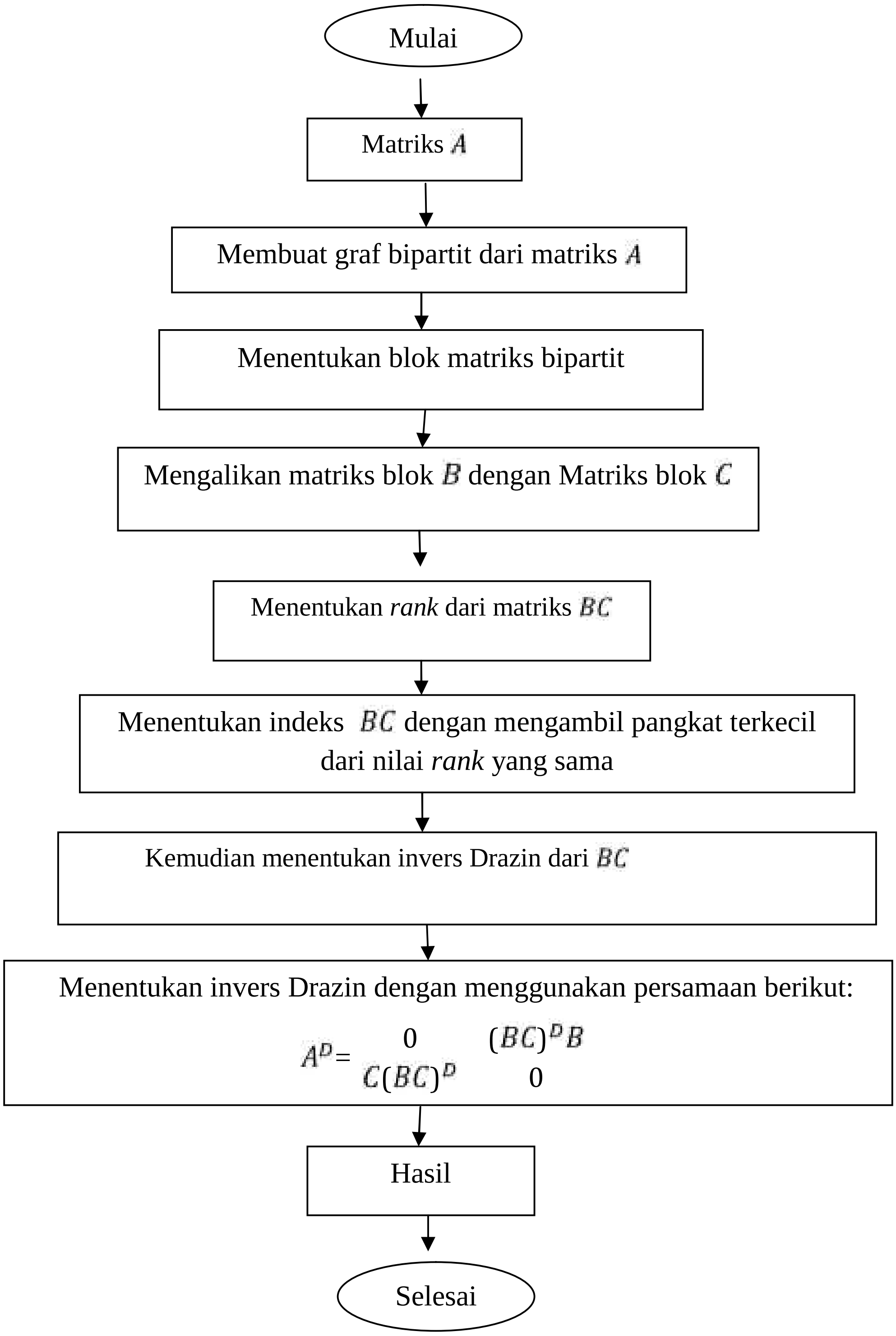
1. Diberikan suatu matriks bipartit dengan ukuran $n \times n$.
2. Membuat graf bipartit dari matriks bipartit yang diberikan
3. Kemudian matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks yang berukuran 2×2 yang berbentuk:

   $$A = \begin{matrix} 0 & B \\ C & O \end{matrix}$$

4. Mengalikan matriks blok B dengan matriks blok C
5. Menentukan $rank$ dari matriks BC
6. Setelah didapatkan $rank\ BC$, akan ditentukan indeks BC dengan mengambil pangkat terkecil dari nilai *rank* yang sama.
7. Kemudian menentukan invers Drazin dari BC
8. Selanjutnya akan ditentukan invers Drazin dari A dengan menggunakan persamaan berikut:

   $$A^D = \begin{matrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{matrix}$$

Langkah – langkah diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut :



Gambar 3.1 *Flowchart* Metode Penelitian

BAB IV
PEMBAHASAN

Berdasarkan landasan teori, maka pada bab IV akan dibahas mengenai bagaimana langkah-langkah dalam menentukan invers Drazin pada matriks bipartit berukuran $n \times n$

4.1 Invers Drazin

Invers Drazin pertama kali dikenalkan oleh Micheal P Drazin pada Tahun 1958 dengan Definisi sebagai berikut:

Definisi 4.1 (M.Catral, D.D Olesky and P. Van Den Driessche]: Jika A matriks $n \times n$ bilangan real atau komplek maka indeks dari A adalah bilangan bulat (q) sedemikian hingga $rank\, A^{q+1} = rank\, A^{q}$ maka invers Drazin dari matriks A adalah matriks tunggal yaitu A^{D} yang memenuhi syarat:

1. $AA^{D} = A^{D}A$ (1)
2. $A^{D}AA^{D} = A^{D}$ (2)
3. $A^{q+1}A^{D} = A^{q}$ (3)

dengan q adalah indeks dari A. Jika indeks $A = 0$ maka A adalah nonsingular dan $A^{D} = A^{-1}$ dan jika indeks $A = 1$ maka $A^{D} = A^{\#}$, yaitu group invers dari A. Adapun langkah-langkah untuk menentukan invers Drazin dari matriks A adalah sebagai berikut:

1. Menentukan $rank$ dari matriks A
2. Menentukan Indeks dari matriks A disimbolkan dengan q dengan mengambil pangkat terkecil dari nilai $rank$ yang sama.
3. Selanjutnya tentukan invers Drazin dari matriks A dengan cara jika $q = 0$ maka $A^{D} = A^{-1}$,jika $q = 1$ maka $A^{D} = A^{\#}$ dan jika $q > 1$ maka $A^{D} = A^{q}$

Contoh 4.1:

Tentukan invers Drazin matriks dibawah ini:

$$A = \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Penyelesaian:

1. Menentukan $rank$ dari perpangkatan A sampai dijumpai nilai $rank$ yang sama.

   a. $Rank\ A$

   $$A = \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 - \frac{1}{2}b_1$$

   $$= \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

   Maka didapat $rank\ A$ = 2

   b. $Rank\ A^2$

   $$A^2 = \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

   $$= \begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

   $$Rank\ A^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + \frac{1}{2}b_1$$

   $$= \begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

   Maka didapat $rank\ A^2$ = 1, sebab $rank\ A \neq rank\ A^2$ maka perlu dilanjukan $rank$ dari A^3.

   c. $Rank\ A^3$

   $$A^3 = \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Rank } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b_3 + \frac{1}{2} b_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapat $rank\, A^3$ = 1, sebab $rank\, A^2$ = $rank\, A^3$ maka pencarian $rank$ dari perpangkatan A dihentikan.

2. Indeks dari matriks A karena didapat $rank\, A$ =2 dan $rank\, A^2$= $rank\, A^3$=1 maka dapat disimpulkan indeks A=2, hal ini berdasarkan Definisi invers Drazin atau Definisi 4.1

3. Menentukan invers Drazin dari matriks A

   Karena A^D = A^q dengan q adalah indeks dari matriks A disini ditunjukan indeks dari matriks A = 2 maka didapat invers Drazin dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi :

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti: Akan ditunjukan A^D yang berlaku tiga sifat yaitu:

1. $AA^D = A^D A$

$$AA^D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^D A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Terbukti } \blacksquare$$

2. $A^D A A^D = A^D$

$$A^D A A^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= A^D$ Terbukti ■

3. $A^{q+1} A^D = A^q$

$A^{2+1} A^D = A^q$

$$A^3 A^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= A^2 = A^q$ Terbukti ■

4.2 Invers Drazin dari Representasi Blok Matriks Bipartit

Teorema 4.1 jika A adalah adalah matriks bipartit maka invers Drazin dari matriks A adalah:

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

Bukti :

Akan ditunjukan bahwa persamaan di atas akan memenuhi persamaan-persamaan yang terdapat pada invers Drazin sebagai berikut:

1. $AA^D = A^DA$

$$AX = \begin{matrix} 0 & B \\ C & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} BC\ BC\ ^D & 0 \\ O & C\ BC\ ^DB \end{matrix} \quad \blacksquare$$

$$XA = \begin{matrix} 0 & BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & B \\ C & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} BC\ BC\ ^D & 0 \\ O & C\ BC\ ^DB \end{matrix} \quad \blacksquare$$

Karena $AX = XA$ maka $AA^D = A^DA$ dengan X adalah invers Drazin (A^D).

2. $A^DAA^D = A^D$

$$XAX = \begin{matrix} 0 & BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & B \\ C & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} BC\ BC\ ^D & 0 \\ O & C\ BC\ ^DB \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & BC\ ^DBC\ BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^DBC\ BC\ ^D & 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & BC\ ^DB \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix}$$

$= A^D$ ■

Jadi dari persamaan di atas terbukti bahwa $A^D A A^D = A^D$ dengan X adalah invers Drazin (A^D)

3. $A^{q+1}A^D = A^q$

$$A^{2s+2}X = \begin{pmatrix} (BC)^{s+1} & 0 \\ 0 & (CB)^{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{s+1}(BC)^D B \\ (CB)^{s+1}C(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^s B \\ (CB)^{s+1}(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^s B \\ C(BC)^s & 0 \end{pmatrix}$$

$= A^{2s+1}$ ■

Dari ketiga persamaan di atas maka terbukti bahwa A^D adalah invers Drazin dari A.

Selanjutnya akan diberikan tiga Lemma yang digunakan untuk melihat sifat-sifat invers Drazin.

Lemma 4.1 Jika U adalah matriks $n \times n$, maka $(U^2)^D = (U^D)^2$

Bukti:

Misalkan A adalah sebuah matriks yang berukuran $n \times n$ maka $(A^2)^D$ adalah Invers Drazin dari A^2 jika q adalah indeks dari A maka berlaku *rank* $(A^2)^q$ = *rank* $(A^2)^{q+1}$. karena $(A^2)^q = (A^q)^2$ maka berlaku $(A^2)^{q+1} = (A^2)^{q+1}$ Sehingga dari penyelesaian di atas maka berarti invers Drazin A^2 sama dengan invers Drazin dikuadratkan. Terbukti bahwa $(U^2)^D = (U^D)^2$ ■

Lemma 4.2 Jika V adalah matriks $m \times n$ dan W adalah $n \times m$, maka $VW \;^{D} = V \quad WV \;^{2} \;^{D} W$

Bukti :

Diketahui: $V = m \times n$

$W = n \times m$

Akan ditentukan: $VW \;^{D} = V \quad WV \;^{2} \;^{D} W$

$$VW \;^{D} = V \quad WV \;^{2} \;^{D}$$

$$= V \quad WV \;^{D} \; WV \;^{D} \quad W$$

$$= \quad WV \;^{D} VW \quad WV \;^{D}$$

Maka berdasarkan Persamaan (2) diperoleh:

$$WV \;^{D} VW \; WV \;^{D} = \quad VW \;^{D} \;\blacksquare$$

Lemma 4.3 Jika B adalah $p \times \quad n - p$ dan C adalah $n - p \quad \times p$, maka $BC \;^{D} B = B \; CB \;^{D}$

Bukti:

Diketahui: $B = p \times \quad n - p$

$C = \quad n - p \; \times p$

Akan ditentukan: $BC \;^{D} B = B \; CB \;^{D}$

Berdasarkan Lemma 4.3.1 dan Lemma 4.3.2 maka diperoleh:

$$BC \;^{D} = B [\; CB \;^{2}]^{D} C$$

$$= B [\; CB \;^{D}]^{2} C$$

Menggunakan Persamaan (1) dan Persamaan (2) maka diperoleh:

$$BC \;^{D} B = B \quad CB \;^{D} \;^{2} CB$$

$$= B \; CB \;^{D} \; CB \;^{D} \; CB$$

$$= B \; CB \;^{D} \; CB \; CB \;^{D}$$

$$= B \; CB \;^{D} \;\blacksquare$$

Berdasarkan Lemma 4.2.3 menunjukan bahwa $CB \;^{D} C = C \; BC \;^{D}$ dan dengan demikian dari Teorema 4.2.1 memberikan empat pernyataan berikut untuk invers Drazin dari matriks bipartit yaitu sebagai berikut:

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(CB)^D \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ (CB)^D C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(BC)^D \\ (CB)^D C & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Indeks pada Matriks A dari Indeks BC

Pada sub bagian ini di jelaskan tentang menentukan indeks dari A (matriks bipartit) yang berukuran $n \times n$ yang dalam hal ini digunakan BC dan indeks BC.

Jika A adalah matriks bipartit maka di dapat dua persamaan sebagai berikut:

$$A^{2j} = \begin{pmatrix} (BC)^j & 0 \\ 0 & (CB)^j \end{pmatrix}$$

dan

$$A^{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^j B \\ C(BC)^j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B(CB)^j \\ (CB)^j C & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $j = 0, 1, 2, 3, \cdots n$

Maka dari persamaan diatas didapat bahwa :

$$rank\, A^{2j} = rank\, (BC)^j + rank\, (CB)^j \text{ dan} \qquad (4)$$

$$rank\, A^{2j+1} = rank\, (BC)^j + rank\, C(BC)^j \qquad (5)$$

Selanjutnya akan diberikan sebuah Teorema mengenai indeks BC namun sebelumnya diberikan Lemma dibawah ini sebagai bahan pembuktian Teorema tersebut:

Lemma 4.4 (*Frobenius Inequality***)** jika $U = m \times k$, $V = k \times n$, dan $W = n \times p$, maka berlaku

$rank\, UV + rank\, VW \leq rank\, V + rank\, UVW$

Bukti :

Diketahui : $U = m \times k$

$V = k \times n$

$W = n \times p$

Akan ditentukan : $rank\, UV + rank\, VW \leq rank\, V + rank\, UVW$

Misalkan $U = 3 \times 4$, $V = 4 \times 3$. dan $W = 3 \times 2$. Maka $UV = 3 \times 3$ $VW = 4 \times 2$, dan $UVW = 3 \times 2$. Maka didapat $rank\, V \leq 4$, $rank\, UV \leq 3$, $rank\, VW \leq 4$ dan $rank\, UVW = 3$, maka dari penyelesaian diatas maka berlaku $rank\, UV + rank\, VW \leq rank\, V + rank\, UVW$. Terbukti bahwa $rank\, UV + rank\, VW \leq rank\, V + rank\, UVW$ ■

Teorema 4.2 Jika A adalah matriks bipartit dan indeks $BC = s \geq 1$ maka indeks $A = 2s - 1$, 2s atau 2s + 1.

Bukti :

Diketahui : $BC = s \geq 1$

dan menurut Lemma 4.3.1 maka diperoleh:

$$rank\ B\ CB^{\ s+1} + rank\ \ CB^{\ s-1} \leq rank\ \ CB^{\ \ s} + rank\, B\ BC^{\ s-1}C$$
$$< rank\ \ CB^{\ s-1} + \ \ BC^{\ s-1}$$

Karena indeks $BC = s$ jadi dengan menggunakan Persamaan (4) dan (5) maka diperoleh $rank\ \ A^{2s-1} < rank\ \ A^{2s-2}$

Dalam hal ini diambil indeks $A > 2s - 2$

Karena itu di dapat indeks $A = 2s - 1,\ 2s\ \ atau\, 2s + 1$ ■

Selanjutnya diberikan beberapa contoh menentukan invers Drazin dari matriks bipartit:

Contoh 4.2:

Diberikan matriks bipartit sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers Drazin dari matriks bipartit diatas:

Penyelesaian :

Adapun langkah–langkah dalam menentukan Invers Drazin dari matriks bipartit tersebut adalah sebagai berikut:

1. Matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks blok 2×2

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right]$$

2. Selanjutnya Matriks blok B dikalikan dengan matriks blok C.

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Kemudian menentukan *rank* matriks BC dan ambil nilai *rank* yang yang sama dari pangkat terkecil, dari nilai *rank* yang sama tersebut didapat indeks BC.

a. $Rank\ BC$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b_2 + b_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b_3 + \frac{1}{2} b_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapat $rank\ BC = 2$

b. $Rank\ (BC)^2$

$$(BC)^2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Rank(BC)^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 - b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ BC^2 = 1$, sebab $rank\ BC \neq rank\ BC^2$ maka perlu di lanjutkan $rank$ dari BC^3

c. $Rank\ BC^3$

$$(BC)^3 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Rank\ (BC)^3 = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 - b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ BC^3 = 1$, sebab $rank\ BC^2 = rank\ BC^3$ maka pencarian $rank$ dari perpangkatan BC dihentikan.

Karena $rank\, BC^2 = rank\, BC^3 = 1$ maka dapat disimpulkan indeks $BC = 2 = s$, hal ini berdasarkan Definisi invers Drazin atau Definisi 4.1 Berdasarkan teorema 4.3.1 maka indeks dari $A = 2s - 1$, $2s$, atau $2s + 1$ disini ditunjukan indeks $A = 3 = 2s - 1$.

4. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari BC

   Karena $BC^D = BC^q$ dengan q adalah indeks dari BC disini ditunjukan indeks BC = 2 maka invers Drazin dari BC adalah sebagai berikut:

$$(BC)^2 = (BC)^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari matriks A dengan menggunakan persamaan berikut :

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{bmatrix}$$

   Sebelum kita masukan kedalam persamaan di atas maka terlebih dahulu kita kalikan $(BC)^D$ dengan masing – masing blok.

$$(BC)^D B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(BC)^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan di atas maka didapat invers Drazin dari matriks A tersebut adalah sebagai berikut:

$$A^D = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \blacksquare$$

Selanjutnya jika diberikan matriks bipartit yang berbentuk

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

dimana B adalah matriks singular yang berukuran $p \times p$, dengan indeks $B = s \geq 1$, dan $C = I$ dimana I adalah matriks identitas maka indeks $CB = s$ dan $rank\ (CB)^{s} \leq rank\ (CB)^{s-1} C$. Dengan demikian maka diperoleh indeks $A = 2s$ dalam hal ini maka invers Drazin dari matriks bipartit tersebut adalah sebagai berikut:

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & B^D B \\ B^D & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.3

Diberikan suatu Matriks bipartit sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers Drazin dari matriks bipartit tersebut

Penyelesaian:

Adapun langkah–langkah dalam menentukan invers Drazin dari matriks bipartit tersebut adalah sebagai berikut:

1. Matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks blok 2×2.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Matriks blok B dikalikan dengan matriks blok C.

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

3. Kemudian menentukan *rank* matriks BC dan ambil nilai *rank* yang sama dari pangkat terkecil, dari nilai *rank* yang sama tersebut didapat indeks BC.

a. $Rank\ BC$

$$BC = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 + b_1$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + \frac{1}{2} b_2$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ BC = 2$

b. $Rank\ (BC)^2$

$$(BC)^2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Rank\ (BC)^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 - b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ BC^2 = 1$, sebab $rank\ BC \neq rank\ BC^2$ maka perlu di lanjutkan $rank$ dari BC^3

c. $Rank\ (BC)^3$

$$(BC)^3 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Rank\ (BC)^3 = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ b_2 - b_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ b_3 + b_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ BC^3 = 1$, sebab $rank\ BC^2 = rank\ BC^3 = 1$ maka pencarian $rank$ dari perpangkatan BC dihentikan.

Karena $rank\ BC^2 = rank\ BC^3 = 1$ maka dapat disimpulkan indeks $BC = 2 = s$, hal ini berdasarkan Definisi invers Drazin atau Definisi 4.1 Berdasarkan Teorema 4.3.1 maka indeks dari $A = 2s - 1,\ 2s$, atau $2s + 1$ disini ditunjukan indeks $A = 4 = 2s$.

4. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari BC

   Karena $BC^D = BC^q$ dengan q adalah indeks dari BC disini ditunjukan indeks BC = 2 maka invers Drazin dari BC adalah sebagai berikut:

$$(BC)^2 = (BC)^D = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

5. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari matriks A dengan menggunakan persamaan berikut

$$A^D = \begin{matrix} 0 & BC\ ^D B \\ C\ BC\ ^D & 0 \end{matrix}$$

   Berdasarkan pepersamaan di atas maka didapat invers Drazin dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$A^D = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \blacksquare$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa invers Drazin dari matriks A di atas sama dengan invers Drazin dengan menggunakan persamaan dibawah ini.

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & B^D B \\ B^D & 0 \end{bmatrix}$$

Berikut akan dibuktikan bahwa invers Drazin dari matriks A sama dengan invers Drazin dengan menggunakan persamaan di atas.

Bukti :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Adapun langkah-langkah dalam menentukan invers Drazin dari matriks bipartit tersebut adalah sebagai berikut:

1. Matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks blok 2×2.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Kemudian menentukan *rank* matriks B dan ambil nilai *rank* yang yang sama dari pangkat terkecil, dari nilai *rank* yang sama tersebut didapat indeks B.

   a. $Rank\ B$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b_2 + b_1$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + \frac{1}{2} b_2$$

$$= \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ B$ = 2

b. $Rank\ (B)^2$

$$(B)^2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Rank\ (B)^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 - b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_3 + b_1$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka didapat $rank\ B^2$ = 1, sebab $rank\ B \neq rank\ B^2$ maka perlu di lanjutkan $rank$ dari B^3

d. $Rank\ (B)^3$

$$(B)^3 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$Rank\ (B)^3 = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad b_2 - b_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} b_3 + b_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapat $rank\, B^3 = 1$, sebab $rank\, B^2 = rank\, B^3 = 1$ maka pencarian $rank$ dari perpangkatan B dihentikan.

Karena $rank\, B^2 = rank\, B^3 = 1$ maka dapat disimpulkan indeks B =2, hal ini berdasarkan Definisi invers Drazin atau Definisi 4.1

3. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari matriks B

   Karena $B^D = B^q$ dengan q adalah indeks dari B disini ditunjukan indeks B = 2 maka invers Drazin dari B adalah sebagai berikut:

$$(B)^2 = (B)^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Selanjutnya akan ditentuka invers Drazin dari matriks A dengan menggunakan persamaan berikut

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & B^D B \\ B^D & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan di atas maka didapat invers Drazin dari matriks A tersebut adalah sebagai berikut:

$$A^D = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Terbukti ■

Contoh 4.4

Diberikan matriks bipartit sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers Drazin dari matriks bipartit diatas:

Penyelesaian:

Adapun langkah-langkah dalam menentukan invers Drazin dari matriks bipartit tersebut adalah sebagai berikut:

1. Matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks blok 2×2

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Selanjutnya matriks blok B dikalikan dengan matriks blok C.

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Kemudian menentukan *rank* matriks BC dan ambil nilai *rank* yang yang sama dari pangkat terkecil, dari nilai *rank* yang sama tersebut didapat indeks BC.

a. $Rank\ BC$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} b_3 - b_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapat $rank\ BC = 2$

b. $Rank\ (BC)^2$

$$BC^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Rank\ BC^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} b_3 - b_1$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapat $rank\ BC^2 = 2$, sebab $rank\ BC = rank\ BC^2 = 2$ maka pencarian $rank$ dari perpangkatan BC dihentikan.

Karena $rank\ BC = rank\ BC^2 = 2$, maka dapat disimpulkan indeks $BC = 1 = s$, hal ini berdasarkan Definisi invers Drazin atau Definisi 4.1 Berdasarkan Teorema 4.3.1 maka indeks $A = 2s - 1$, $2s$, atau $2s + 1$, disini ditunjukan indeks $A = 3 = 2s + 1$.

4. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari BC karena indeks $BC = 1$ maka $(BC)^D = BC^{\#} = BC(q\ BC\ )^2$ sehingga didapat group invers ebagai berikut:

$$BC^{\#} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Selanjutnya menentukan invers Drazin dari matriks A dengan menggunakan persamaan berikut:

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & BC^{\#}B \\ C\ BC^{\#} & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan di atas maka didapat invers Drazin dari matriks A yaitu sebagai berikut:

$$A^D = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \blacksquare$$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Invers Drazin dari suatu matriks bujur sangkar A yang ditulis dengan A^D merupakan sebuah invers yang memenuhi persamaan berikut:

   $AA^D = A^DA$

   $A^DA\,A^D = A^D$

   $A^{q+1}A^D = A^q$

   dengan q adalah indeks dari A. Jika indeks $A = 0$ maka A adalah nonsingular dan $A^D = A^{-1}$ dan jika indeks $A = 1$ maka $A^D = A^{\#}$, yaitu Group invers dari A.

2. Adapun langkah-langkah untuk menentukan blok invers drazin dari matriks bipartit adalah sebagai berikut:

   a. Diketahui matriks bipartit berukuran $n \times n$, matriks bipartit tersebut diblok menjadi matriks yang berukuran 2×2 yang berbentuk $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

   b. Kemudian matriks blok B dikalikan dengan matriks blok C dan tentukan *rank* dari matriks BC kemudian diambil pangkat terkecil dari niali *rank* yang sama untuk mendapatkan indeksnya.

   c. Kemudian menentukan invers Drazin dari BC

   d. Menentukan invers Drazin dari A dengan Menggunakan persamaan berikut

   $$A^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis menentukan invers drazin dengan menggunakan matrikks bipartit, diharapkan bagi pembaca yang berminat untuk melanjutkan tugas akhir untuk menggunakan matriks yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ketujuh. Jakarta.2000

Catral, M. DD, Olesky and Van Den Den Driessche P. *Blok Representations of The Drazin Inverse Of A Bipartite Matriks*. Electronik journal of linear algebra. Vol 18, pp, (98-107).2009.

Catral, M. DD. Olesky and. Van Den Den Driessche P. *Group Inverses Of Matrices With Path Graph.* Electronik journal of linear algebra, Vol 18, pp, (219-233) 2008.

Chang Jiang bu, and Kuize Zhang. *The Expilit Representation Of The Drazin Invers Of A Class Of Block Matrices.* Elektronik journal of linear algebra ISSN 1081-3810, Vol 20,pp,(406-418) 2010

Dragana. Cvetkovic-Ilic S. *A note on the representation for the Drazin Invers of* 2×2 *block matrick.* Supported by Grant No.1440 of the Ministry of Science, Teknology and Development, Republik of Serbia.

Jong jek siang. Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu komputer. Andi Yogyakarta, 2009

Khasanah, Lisnalwati. dan Bambang Irawanto. *Menentukan invers drazin dari matriks singular*. Jurnal Matematika Vol. 14; No. 3, (137-142), 2011

Rinaldi, munir. *Matematika Distrit.* Informatika Bandung, 2007

Ruminta. *Matriks Persamaan Linear Dan Pemograman Linear*. Rekayasa Sains, Bandung 2009

Santosa, Gunawan R . *Aljabar linear dasar.* Andi Yogyakarta.2009

Setiadi. *Aljabar Linear*. Edisi Pertama-Yogyakarta, Garaha Ilmu, 2008